

Séries de Fourier

Enoncés des exercices

EX₁ : a) Du développement en série de Fourier de $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$ déduire la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
b) Du développement en série de Fourier de $f(x) = e^x$, déduire la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2+1}$.

EX₂ : Développer en série de Fourier la fonction définie par : $f(x) = \max(\sin x, 0)$

EX₃ : Développer en série de Fourier la fonction f 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$$

• Déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - \cos \frac{n}{2}}{n^2}$

EX₄ On considère la fonction f de période 2π définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| < \pi \\ 0 & \text{si } x = -\pi \end{cases}$$

Montrer que f est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

EX5 : Déterminer les séries de Fourier associées aux fonctions suivantes et étudier leur convergence

1°) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - E(x)$

2°) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique et telle que
 $\forall x \in [-\pi, +\pi[$, $g(x) = x$

3°) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 1-périodique et telle que
 $\forall x \in [-1, +1]$, $h(x) = x^2$

4°) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $2l$ -périodique et telle que

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{l} & \text{si : } 0 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{si : } \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

EX6

On désigne par f la fonction 2π -périodique impaire définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \pi$$

Déterminer la série de Fourier qui lui est associée et préciser sa convergence

En déduire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série

EX7

Déterminer la série de Fourier associée à la fonction, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \text{Arc sin}(\sin x)$

(2)

EX₈ : Montrer que pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 kx}{4k^2 - 1}$$

EX₉ : Montrer que la fonction 2π -périodique, paire, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \pi - 2x$ est développable en série de Fourier. En déduire la somme $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

EX₁₀ : Soit f la fonction impaire sur $\mathbb{R}^*$ de période 2 définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in [0, 1[\\ -a & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

- Développer en série de Fourier.
- Comparer f et sa série de Fourier.

EX₁₁ : On considère la fonction f paire, 2π -périodique définie par : $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$ si $x \in [0, \pi]$.

- Déterminer la série de Fourier associée à f .
- Montrer que f est développable en série de Fourier, et que cette série converge sur $\mathbb{R}$.
- En déduire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

EX 12: On considère la fonction impaire, 2π -périodique définie par : $f(x) = x(1-x)$ si $x \in [0, 1]$

1°) Déterminer la série de Fourier associée.

2°) Montrer que cette série converge sur $\mathbb{R}$.

3°) Montrer que f est développable en série de

4°) En déduire la suite α_n telle que :

$$1 - 2x = \sum \alpha_n \cos n\pi x, \text{ pour tout } x \in [0, 1]$$

5°) Trouver les valeurs des deux séries numériques

$$\text{suivants : } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

6°) En utilisant la question 3), déduire le développement en série de Fourier de la fonction g , 2π -périodique, impaire, définie par :

$$g(x) = x(\pi - x) \text{ si } x \in [0, \pi]$$

EX 13 Soit t un réel $0 < t < 1$ et soit f la fonction, 2π -périodique définie dans

$$[-\pi, \pi[\text{ par : } f(x) = \cos tx$$

a) Montrer que f est développable en série de Fourier

b) Écrire $f(\pi)$ et déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t^2}{n^2 - t^2} = 1 - \frac{\pi t}{\operatorname{tg}(\pi t)}$$

EX14 Soient f et g les fonctions, 2π -périodiques définies sur $[0, \pi]$ par:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ \pi - x & \text{si } x \in]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

avec f est paire et g impaire sur $\mathbb{R}^*$

- 1°) a) Calculer les coefficients de Fourier de f
 b) Montrer que f est développable en série de Fourier

- c) Montrer que la série de Fourier, associée à f converge sur $\mathbb{R}$

- 2°) a) Calculer les coefficients de Fourier de g
 b) g est-elle développable en série de Fourier

- 3°) Soit h la fonction, 2π -périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par:

$$h(x) = \begin{cases} \pi & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 2(\pi - x) & \text{si } x \in [-\pi, 0[\cup]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

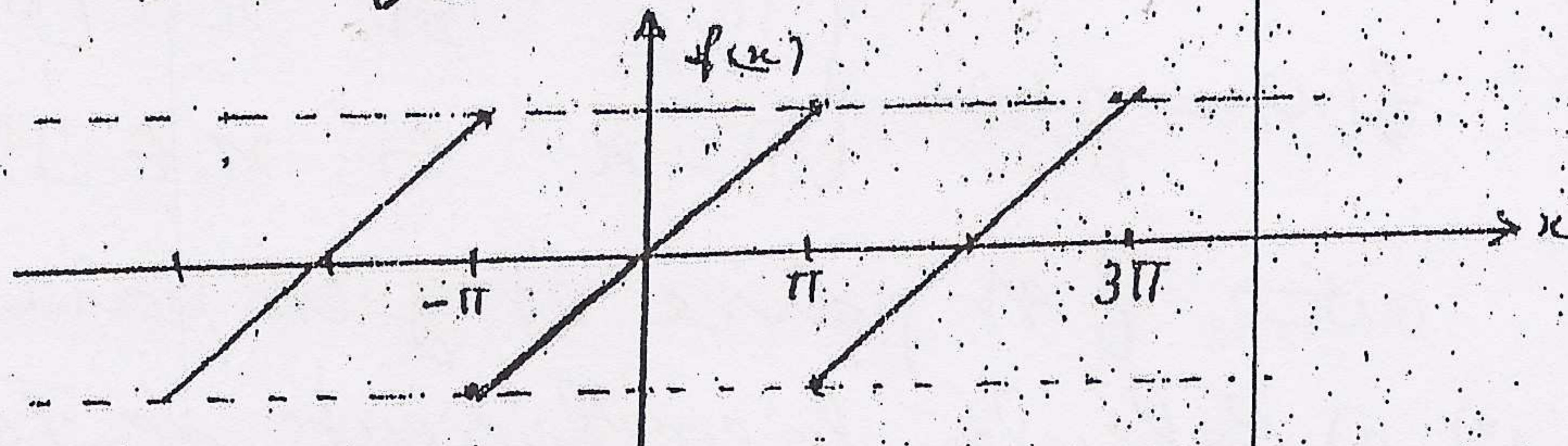
- a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) + g(x) = h(x)$
 b) En déduire les coefficients de Fourier de h
 c) h est-elle développable en série de Fourier

>

Séries de Fourier

Réponses des exercices

EX1 : a) $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$



f impaire $\Rightarrow a_0 = a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$= -\frac{2 \cos n \pi}{n} = -2 \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\boxed{\{f\}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx}$$

f : 2π -périodique

f : bornée $|f(x)| \leq \pi$

$f \nearrow$ continue dans $]-\pi, \pi[$

$\Rightarrow$ d'après le th de Dirichlet la série de Fourier converge dans $]-\pi, \pi[$ et $\{f\}(x) = f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$

pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a : $\{f\}\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

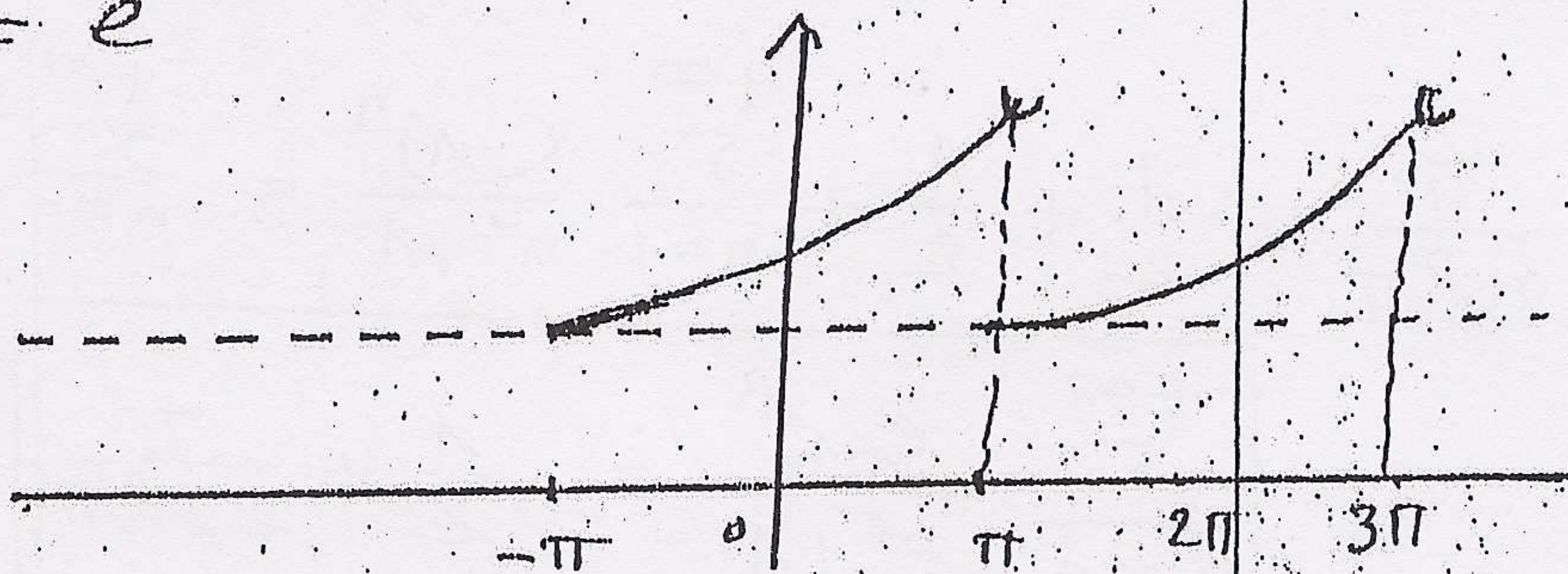
$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} \sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) ; \text{ car } \sin \frac{2k}{2}\pi = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} (-1)^k \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

b) $f(x) = e^x$



$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} = \boxed{\frac{\text{sh } \pi}{\pi}}$$

$n \geq 1$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx$ 2 fois par partie

$$= \frac{1}{\pi} \left[e^x \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx$$

$$= (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} + \frac{n}{\pi} \left[e^x \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx$$

$$a_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} - n^2 a_n \Rightarrow a_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$\boxed{a_n = (-1)^n \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \cdot \frac{2}{n^2 + 1}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[e^x \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = -n$$

$$b_n = -n a_n = (-1)^{n+1} \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \cdot \frac{2n}{n^2 + 1}$$

$$\boxed{\{f\}(x) = 2 \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 + 1} + (-1)^{n+1} \frac{n \cdot \sin nx}{n^2 + 1} \right]}$$

Dirichlet

f : 2π périodique

f : bornée $|f(x)| \leq e^{\pi}$

f continue dans $] -\pi, \pi[$

d'après le th de Dirichlet la

série de Fourier cv ds $] -\pi, \pi[$

et $\{f\}(x) = f(x) = e^x \sin]-\pi,$

pour $x=0$ on a:

$$\{f\}(0) = f(0) = e^0 = 1 = \frac{2 \text{sh } \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right]$$

$$\frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi}}$$

Si $x = \pi + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots$

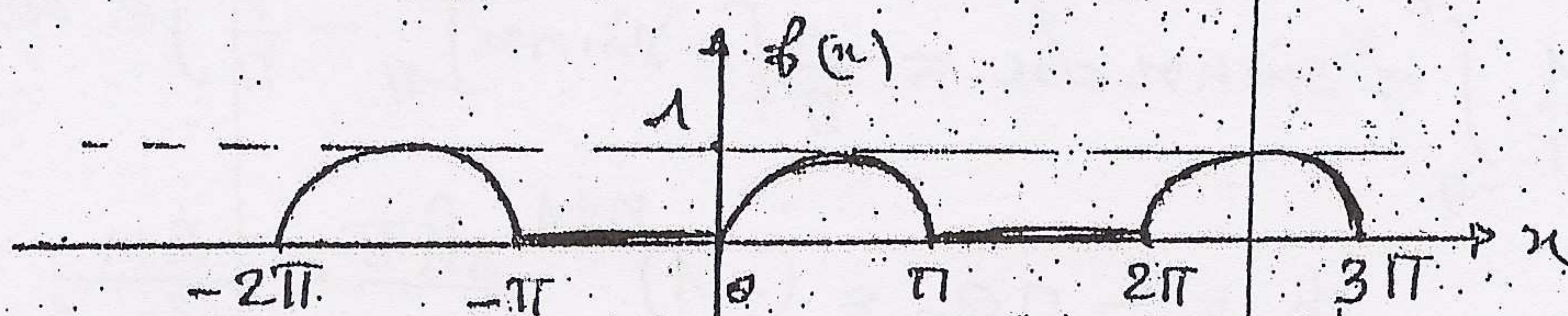
$$\begin{cases} f(\pi^+) = f(\pi+0) = e^{-\pi} \\ f(\pi^-) = f(\pi-0) = e^{\pi} \end{cases}$$

au pts $x = \pi + 2k\pi$, le développement de Fourier converge

vers $\frac{1}{2} [f(\pi^+) + f(\pi^-)] = \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} = \operatorname{ch} \pi \neq f(\pi)$

EX₂ : $f(x) = \max(\sin x, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$

on a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sin x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ est } 2\pi\text{-périod}$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \boxed{\frac{1}{\pi}}$$

$n \geq 1$ $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(n+1)x - \sin(n-1)x dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{n-1} \right]$$

$$a_{2p} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{2p+1} - \frac{2}{2p-1} \right] = \boxed{\frac{1}{2\pi} \frac{-4}{4p^2-1} \quad ; \quad n=2p}$$

$$\boxed{a_{2p+1} = 0 \quad ; \quad n=2p+1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\sin(n-1)x}{n-1} \right)_0^{\pi} - \left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1} \right)_0^{\pi} \right] = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{et } b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\{f\}(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} \cos 2px}$$

Dirichlet

f : 2π -périodique, bornée, monotone et continue sur $[0, 2\pi]$ donc la série de Fourier converge $\forall x \in \mathbb{R}$ vers

ou bien : f : 2π -périodique, bornée sur $[-\pi, \pi]$

on suppose qu'on peut partager $[-\pi, \pi]$ en un nb fini d'intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$; $-\pi = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = \pi$

EX3
$$f(x) = \begin{cases} 1-2|x| & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$$

f : 2π -périodique sur $[-\pi, \pi]$

$$f \text{ est paire} \Rightarrow \boxed{b_n = 0 \quad \forall n \geq 1}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/2} (1-2x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{1/2}^1 0 dx$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{4\pi}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} (1-2x) \cos nx dx$$

par intégration par partie : $\boxed{a_n = \frac{4(1 - \cos \frac{n}{2})}{\pi n^2}}$

$$\boxed{\{f\}(x) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1 - \cos \frac{n}{2})}{\pi n^2} \cos nx}$$

d'après le th de Dirichlet, la série de Fourier associée à f converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Or f est continue, donc développable en série de Fourier et on a :

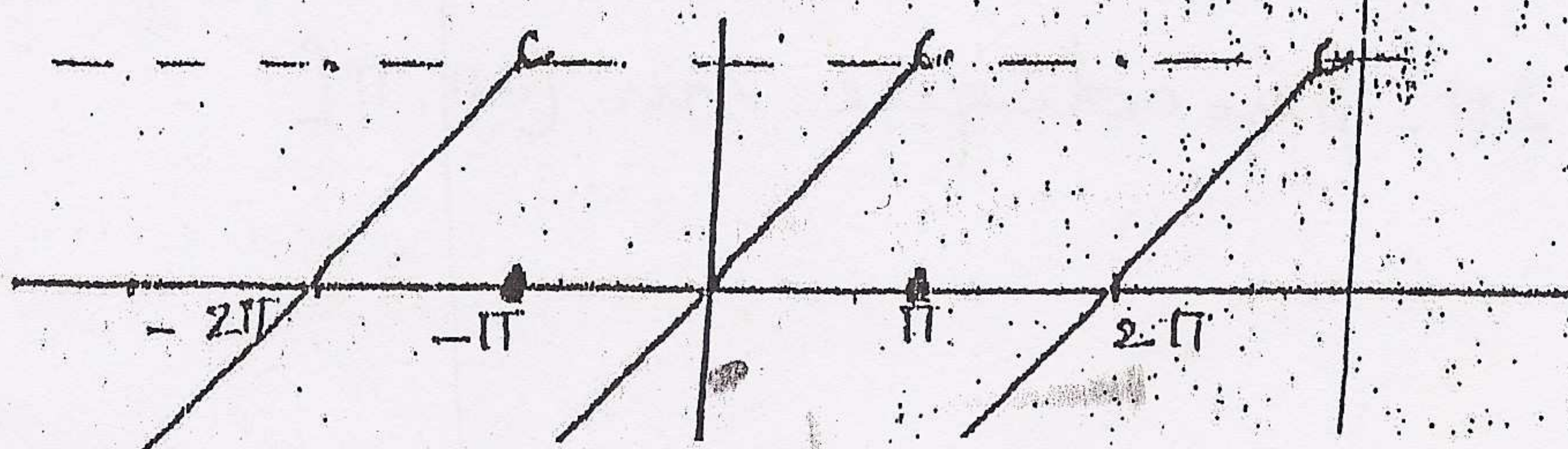
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1 - \cos \frac{n}{2})}{\pi n^2} \cos nx}$$

Pour $x=0$ on a : $1 = f(0) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1 - \cos \frac{n}{2})}{\pi n^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos \frac{n}{2}}{n^2} = \frac{1}{4} (\pi - \frac{1}{4})}$$

EX4

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| < \pi \\ 0 & \text{si } |x| = \pi \end{cases}$$



f impaire $\Rightarrow \begin{cases} a_0 = a_n = 0 & \forall n \geq 1 \\ \text{et } b_n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{cases}$ voir EX1

$$\Rightarrow \{f\}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

D'après le th de Dirichlet (voir EX1) on a :

$$\boxed{\{f\}(x) = f(x) \quad \forall x \in]-\pi, \pi[}$$

aux points $-\pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

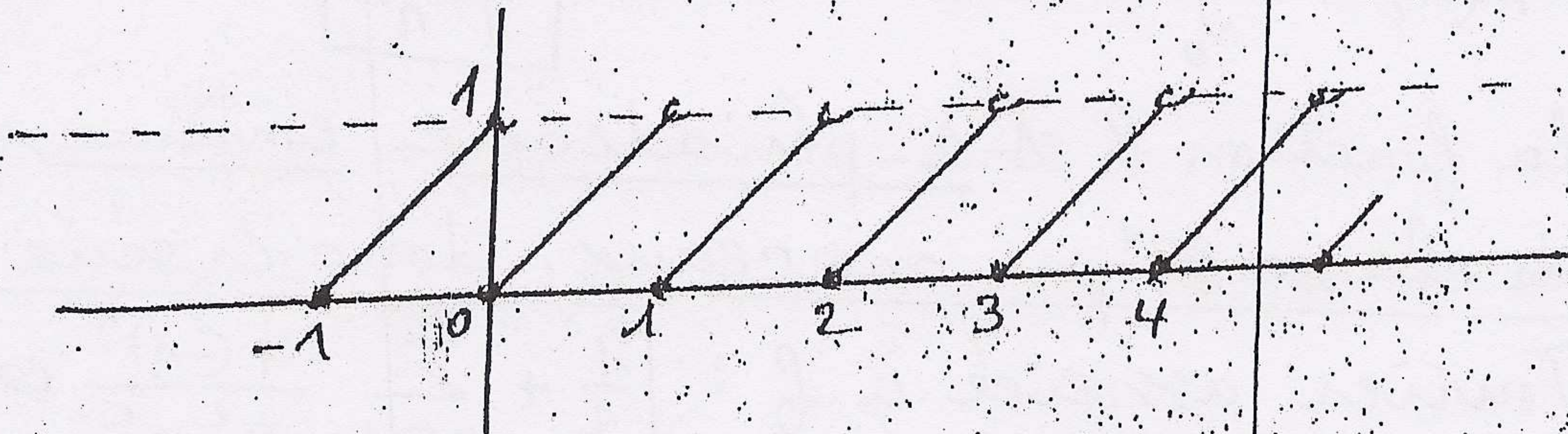
$$\| \{f\}(-\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(-\pi-0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 = f(-\pi)$$

$$\| \{f\}(\pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 = f(\pi)$$

donc on a : $\{f\}(x) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$

donc f se développe en série de Fourier

EX5 1°) $f(x) = x - E(x)$



La fonction f est continue par morceaux, 1-périodique

$$a_0(f) = \frac{1}{1} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 x dx = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$a_n(f) = 2 \int_0^1 x \cos(2\pi n x) dx = \left(\frac{x}{2\pi n} \sin 2\pi n x \right)_0^1 - \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \sin(2\pi n x)$$

$$= 0 + \frac{1}{(2\pi n)^2} \left(\cos(2\pi n x) \right)_0^1 = 0$$

$$\boxed{a_n(f) = 0} \quad n;$$

$$b_n(f) = 2 \int_0^1 x \sin(2\pi n x) dx \stackrel{\text{par}}{=} -\frac{1}{n\pi} = b_n(f)$$

La série de Fourier associée à f est:

$$\{f\}(u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n\pi} \sin(n 2\pi u)$$

La fonction f étant continue par morceaux, donc le th de Dirichlet permet d'affirmer la convergence de

sa série de Fourier sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ vers $f(u) = u$

Pour $u \in \mathbb{Z}$ on a $\{f\}(u) = \frac{f(u^+) + f(u^-)}{2} = \frac{1}{2}$

2°) $g(u) = u \quad \forall u \in [-\pi, +\pi[$ Voir EX1

3°) $h(u) = u^2 \quad \forall u \in [-1, 1]$, 2-périodique

h paire $\Rightarrow \boxed{b_n = 0} \quad \forall n \geq 1$

$a_0(h) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(u) du = \int_0^1 u^2 du = \boxed{\frac{1}{3}}$

$a_n(h) = 2 \int_0^1 u^2 \cos(n\pi u) du = \boxed{\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}}$

La fonction h est 2-périodique continue sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc la série de

Fourier associée à f : $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi u)$

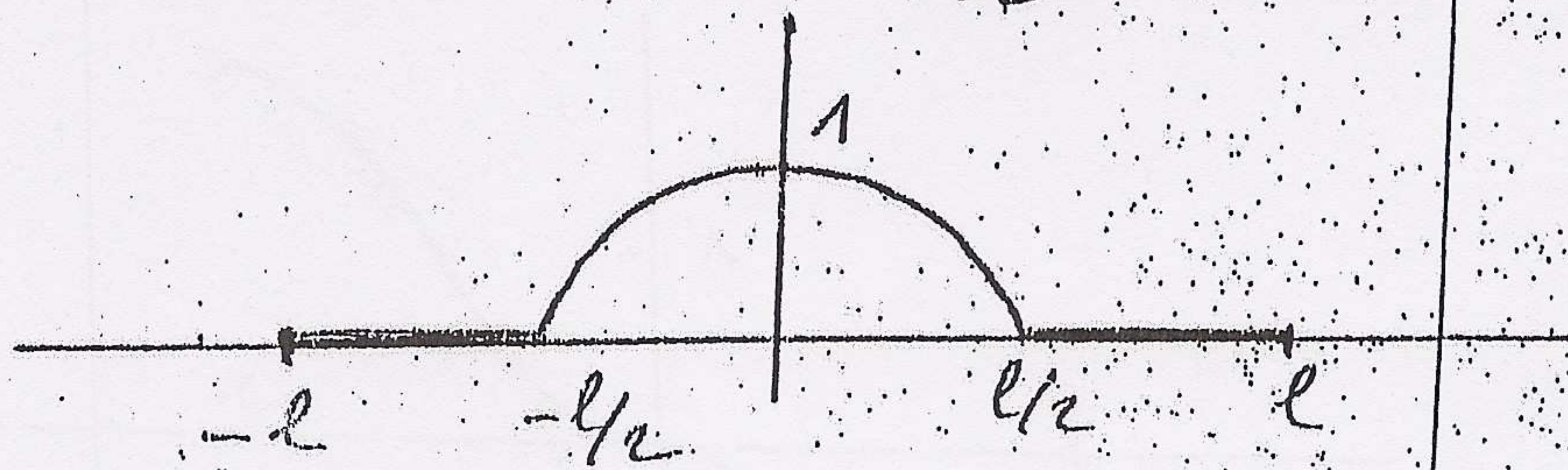
converge vers $f(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$ c.a.d $\{f\}(u) = f(u)$

Pour $u=1$ (par exemple) on a :

$f(1) = 1 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2}$

$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

$$4^o) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{l} & \text{si } 0 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{si } l/2 < x \leq l \end{cases}$$



f est paire donc $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^{l/2} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \boxed{\frac{1}{\pi}}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{l/2} (\cos \frac{(n+1)\pi x}{l} + \cos \frac{(n-1)\pi x}{l}) dx \end{aligned}$$

$$\text{Si } n=1 \quad a_1 = \frac{1}{l} \int_0^{l/2} \cos\left(\frac{2\pi x}{l} + 1\right) dx = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Si } n \geq 2 \quad a_n = \frac{1}{l} \left[\frac{l}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{n+1}{l}\pi x\right) + \frac{l}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{n-1}{l}\pi x\right) \right]_0^{l/2}$$

$$= \frac{1}{l} \left[\frac{l}{\pi(n+1)} \sin \frac{(n+1)\pi}{2} + \frac{l}{\pi(n-1)} \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{l} \left[\frac{l}{\pi(n+1)} \cos n \frac{\pi}{2} - \frac{l}{\pi(n-1)} \cos \frac{n\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi l} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$= \boxed{\frac{-2}{\pi(n^2-1)} \cos \frac{n\pi}{2}}$$

$$\text{Si } n = 2p+1$$

$$a_{2p+1} = 0$$

$$\text{Si } n = 2p$$

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{\pi} \cdot \frac{-2}{4p^2-1}$$

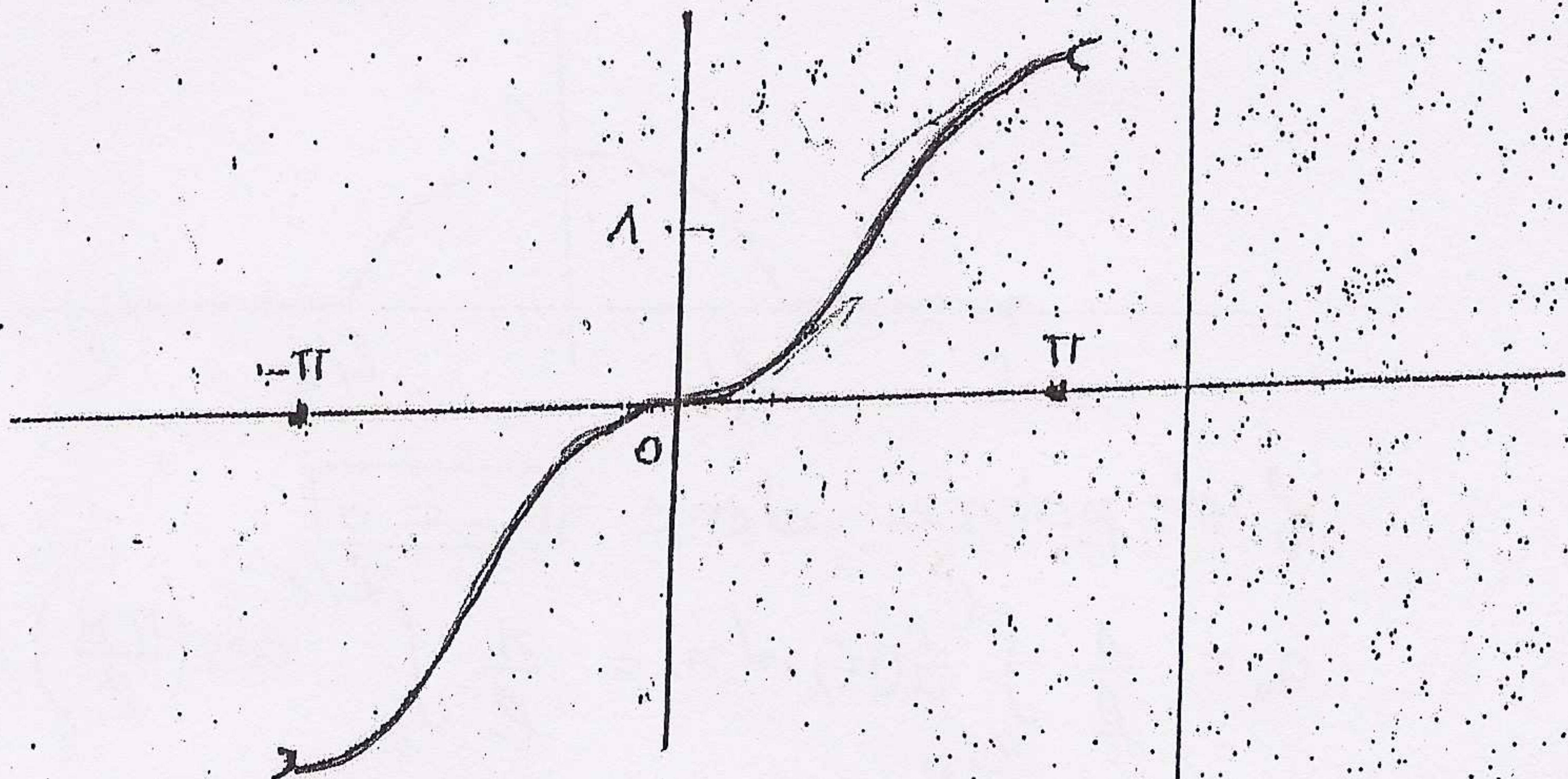
f continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le th de Dirichlet on

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{l} x + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} \cos \frac{2p\pi}{l} x$$

EX 6

f : impaire, 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$



f est impaire $\Rightarrow a_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sin nx - \frac{1}{2} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] \right] dx$$

si $n=1$ $b_1(f) = \frac{2}{\pi} \left[-\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{4}{\pi}}$

et pour $n \geq 2$

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} + \frac{1}{2} \frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi}$$

$$= \boxed{\frac{2}{\pi} \left[\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} + \frac{n[(-1)^{n+1} - 1]}{n^2 - 1} \right]}$$

on obtient donc la série de Fourier associée à f

$$\{f\}(x) = \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} + \frac{n[(-1)^{n+1} - 1]}{n^2 - 1} \right] \sin nx$$

f est continue par morceaux, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Ses discontinuités étant régulières, c.à.d :

$$\{f\}(-\pi) = \{f\}(\pi) = \frac{-\pi + \pi}{2} = f(-\pi) = f(\pi) = 0$$

Donc d'après le théorème de Dirichlet f et la somme de sa série de Fourier $\forall n \in \mathbb{R}$; c.à.d. $\boxed{f(x) = S(x) \quad \forall x}$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$1 = \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} + \frac{n((-1)^{n+1} - 1)}{n^2 - 1} \right] \sin \frac{n\pi}{2}$$

Remarquons que:

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

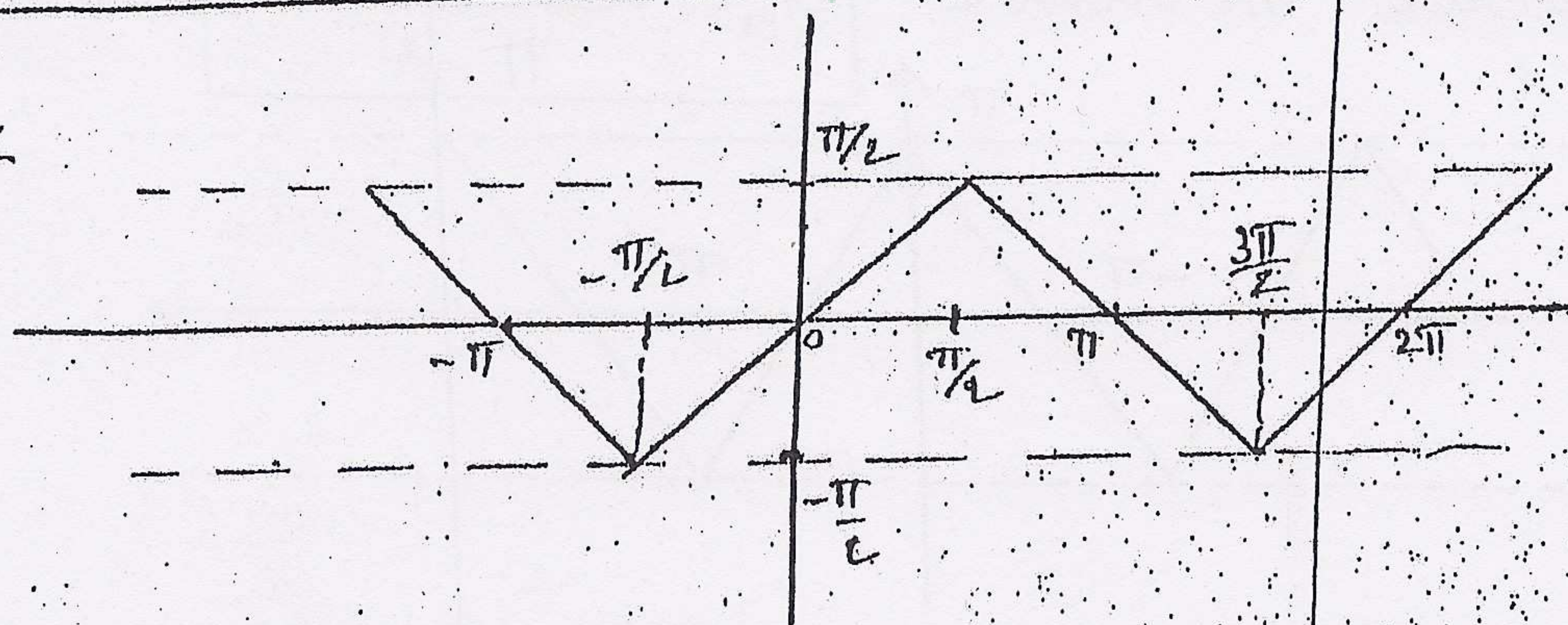
on obtient finalement:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{2p+2}}{2p+1} + \frac{n[(-1)^{2p+2} - 1]}{(2p+1)^2 - 1} \sin \frac{(2p+1)\pi}{2}$$

$$\text{soit } \frac{\pi}{4} = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}}$$

EX 7



Voir cours
Terminal

La fonction f est 2π -périodique, impaire, continue dérivable par morceaux.

f : impaire $\Rightarrow \boxed{a_n(f) = 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} t \sin nt dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin nt dt \right]$$

$$= \boxed{\frac{4}{\pi n^2} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}; \quad \boxed{f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \sin nx}$$

f continue et vérifie les hypothèses de Dirichlet, donc la série de Fourier converge vers $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et on a: $f(x) = S(x) = f(x)$

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right]; \text{ il vient donc}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2N+1} \right] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Enfinement on obtient: $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}$

EX9

f 2π -périodique, paire, définie sur $[0, \pi]$ par

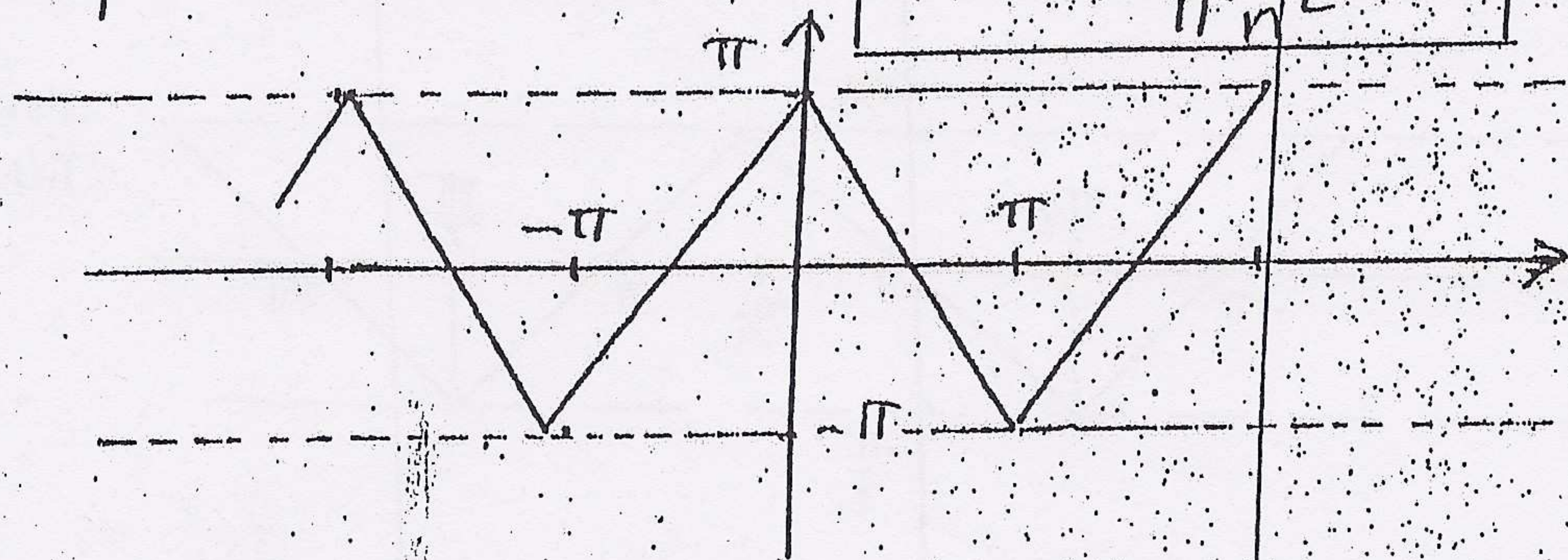
$$f(x) = \pi - 2x$$

f paire donc $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$ et

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - 2x) dx = 0; \quad \boxed{a_0 = 0}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos nx dx$$

par partie on trouve $\boxed{a_n = \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^2}} \quad \forall n \geq 1$



La série de Fourier associée à f est:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^2} \cos nx$$

La fonction f est bornée sur $[-\pi, \pi]$ par π , elle est croissante, continue sur $]-\pi, 0[$ et décroissante continue sur $]0, \pi[$. Donc par le th de Dirichlet, la série de Fourier associée à f converge

en tout point $x \in \mathbb{R}$ et sa somme est :

$$\{f\}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

or f est continue sur $\mathbb{R}$ donc on a $\{f\}(x) = f(x) \quad \forall x$
 (ou bien f est continue sur $] -\pi, \pi[$ donc $\{f\}(x) = f(x) \quad \forall x \in] -\pi, \pi[$
 au pt π et $-\pi$ on a :

$$\{f\}(\pi) = \{f\}(-\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi - \pi}{2} = -\pi = f(\pi) = f(-\pi)$$

donc on a $\{f\}(x) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow \{f\}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 donc f est développable en série de Fourier et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right) \cos nx \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \end{aligned}$$

au pto on obtient : $\pi = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

EX 10 a) f impaire donc $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

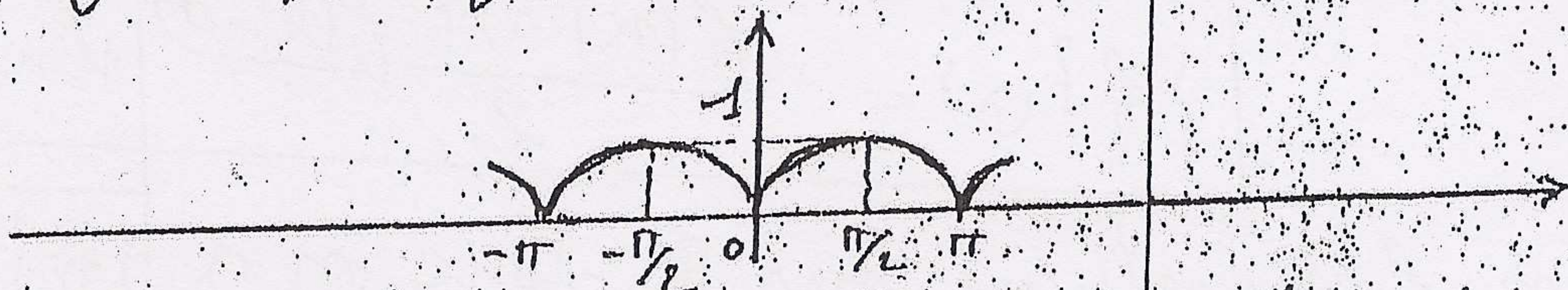
$$\begin{aligned} n \geq 1; \quad b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{1} dx = 2 \int_0^1 a \sin n\pi x dx \\ &= 2a \left[-\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{2a}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

$$b_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = \frac{4a}{(2p+1)\pi}$$

La série de Fourier
 associée à f est

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4a}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)\pi x$$

EX8: On considère la fonction, paire, 2π -périodique
définie par $f(x) = |\sin x|$ si $x \in [0, \pi]$



La fonction f est paire $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx, \text{ (voir EX1)}$$

on trouve $a_{2p} = \frac{-4}{\pi(4p^2 - 1)} ; n = 2p$

Par suite la série de Fourier associée à la fonction

$$\{f\}(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4p^2 - 1)} \cos 2px$$

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier
converge vers $f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

car f 2π -périodique, bornée, non nulle et continue en

et on a:

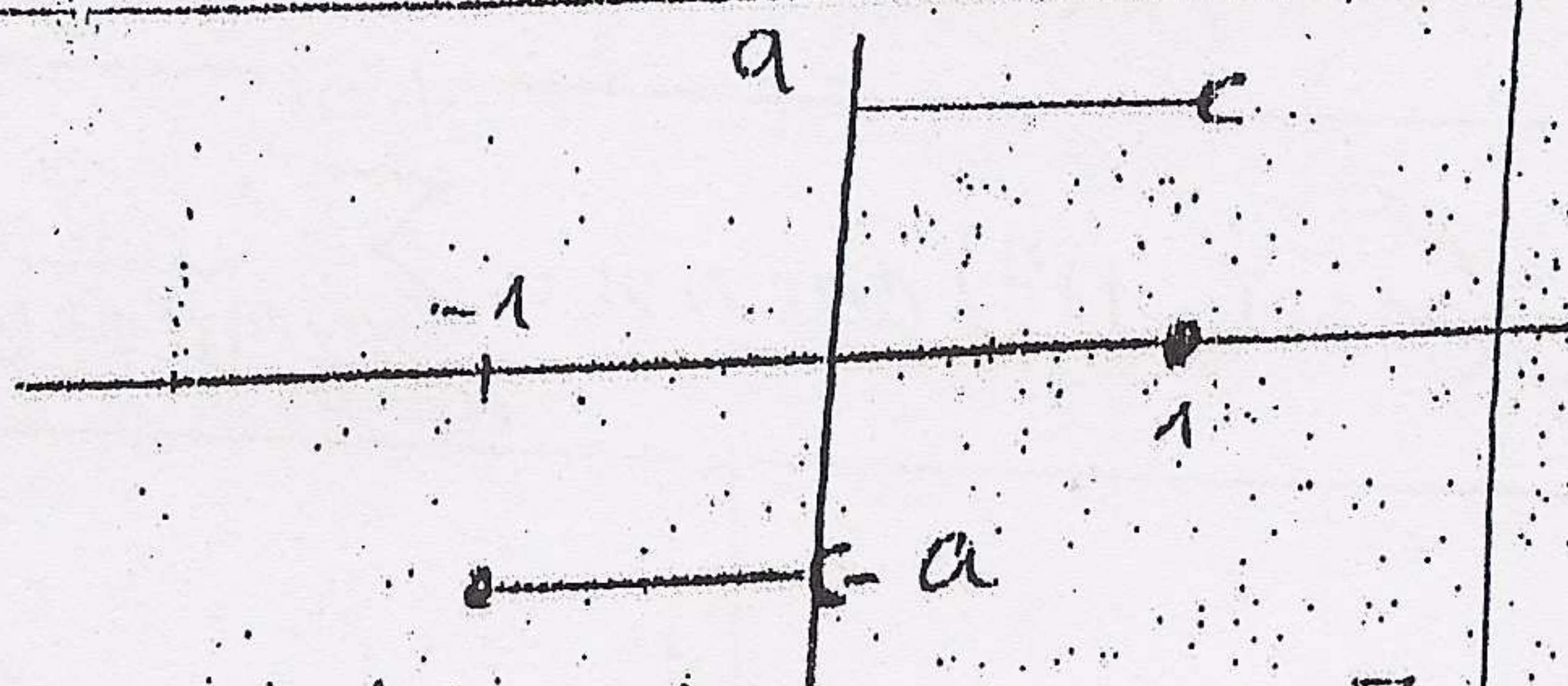
$$\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2nx$$

d'après la relation: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

on obtient: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}$$

Pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$, utilisons



La fonction f est bornée sur $[-1, 1]$; $|f(x)| \leq a$
 elle est constante, continue sur $]-1, 0[$ et constante
continue sur $]0, 1[$. Donc par le th de Dirichlet,
 la série de Fourier associée à f converge en
 tout point $x \in \mathbb{R}$ et sa somme est :

$$\{f\}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) f est continue sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$ donc $\{f\}(x) = f(x)$
 $f(0) = -a \neq \{f\}(0)$

$$\text{donc } \{f\}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-1, 0[\cup]0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

donc f n'est pas développable en série de Fourier ?

EX 11 1°) $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi} \quad x \in [0, \pi]$

f paire donc $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \left(\pi - \frac{\pi^2}{\pi}\right) = 0$$

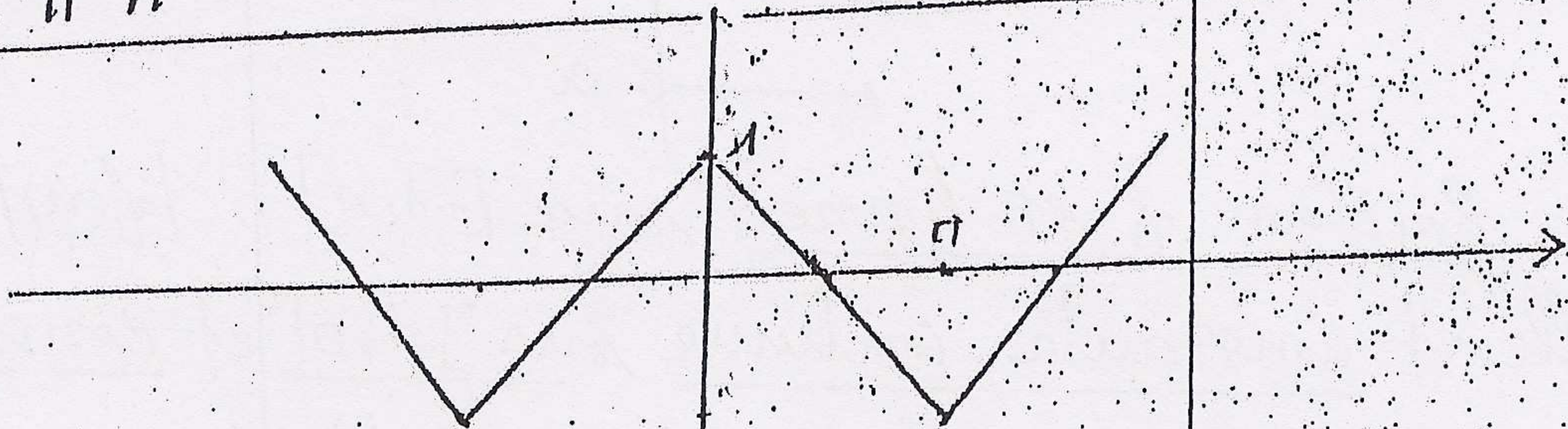
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cos nx dx \text{ par partie on trouve :}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n)$$

La série de Fourier associée à f est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \cos nx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos(2k+1)x$$

2°)



- f est bornée sur $[-\pi, \pi]$
- f est croissante continue sur $]-\pi, 0[$
- f est décroissante continue sur $]0, \pi[$

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

donc par le th de Dirichlet la série de Fourier ass à f converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et sa somme est

$$\{f\}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

or f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\{f\}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(cà.d cv en tout pt $x \in \mathbb{R}$ vers $f(x)$)

3°) On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos(2k+1)x$

$$f(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2 (2k+1)^2} = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi^2 \cdot 4}{3 \cdot 8/2}$$

(11)

EX12 $f(x) = x(1-x)$ impaire

1°) f impaire donc $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq 1$ $b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x \, dx$

Par deux intégrations par parties on trouve:

$$b_n = \frac{4}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n)$$

La série de Fourier associée à f est alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{1 - (-1)^n}{n^3 \pi^3} \sin n\pi x$$

2°) On a $|b_n \sin n\pi x| \leq \frac{8}{n^3 \pi^3}$ pour tout $n \geq 1$

$\frac{1}{n^3}$: terme général d'une série convergente

donc la série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$

3°) f est bornée sur $[-1, 1]$, f est décroissante continue sur $] -1, -\frac{1}{2} [$, f est croissante continue sur

$] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [$ et f est décroissante continue sur $] \frac{1}{2}, 1 [$

d'où par le théorème de Dirichlet la série de Fourier associée à f converge en tout point $x \in \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est développable en série de Fourier

4°) D'après 3°) on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{d'où } x(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x \quad \text{pour tout } x \in [0, 1]$$

$$\text{On a } (b_n \sin n\pi x)' = n\pi b_n \cos n\pi x = 4 \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos$$

$$|V_n(x)| = \left| 4 \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right| \leq \frac{8}{n^2\pi^2}$$

$\frac{8}{n^2\pi^2}$ terme général d'une série convergente

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(x)$ converge en tout point $x \in \mathbb{R}$

de plus chaque fonction $b_n \sin n\pi x$ est de classe C^1
donc on peut dériver terme à terme et on obtient

$$1-2x = \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \quad \forall x \in [0,1]$$

donc $\boxed{\alpha_0 = 0}$ et $\boxed{\alpha_n = 4 \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}}$ pour $n \geq 1$

5°) on a:

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{1-(-1)^n}{n^3\pi^3} \sin n\pi x = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^3}$$

pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{1}{4} = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \quad \text{donc} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}}$$

on a:

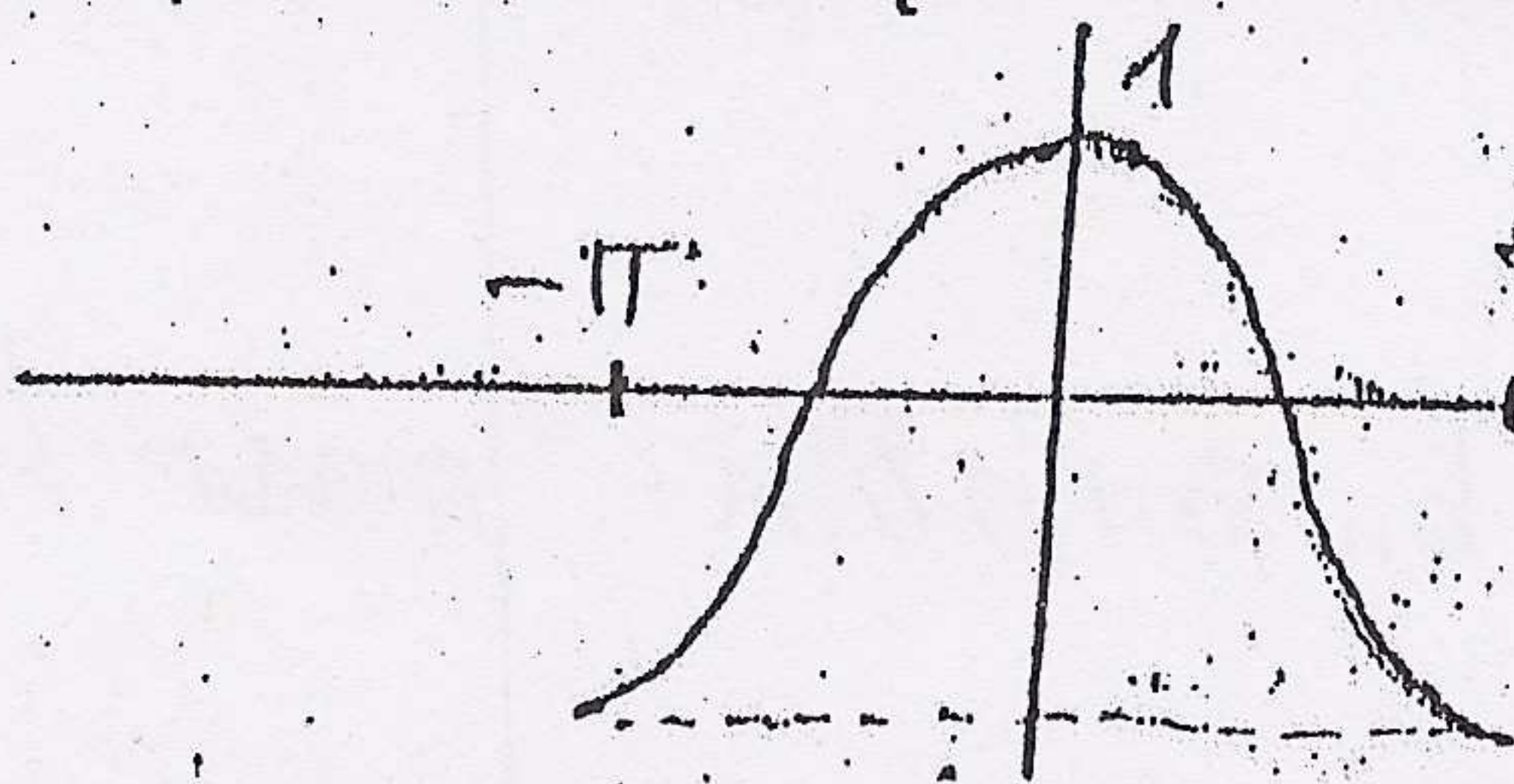
$$1-2x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi x$$

pour $x=0$: on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

EX 13 $f(x) = \cos tx$, $t \in]0,1[$

f : 2π -périodique, définie dans $[-\pi, \pi[$



f paire $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos tx dx = \boxed{\frac{\sin \pi t}{\pi t}} \text{ et}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos tx \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n+t)x + \cos(n-t)x]$$

après intégration, on trouve $\boxed{a_n = (-1)^n \frac{\sin \pi t}{\pi t} \left(\frac{2t^2}{t^2 - n^2} \right)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ est continue sur }]-\pi, \pi[\text{ et } \forall t \in]0, 1[\\ \bullet f \searrow \text{ sur } [0, \pi[\text{ et } \nearrow \text{ sur }]-\pi, 0[\\ \bullet f(-\pi) = f(\pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \cos \pi t \end{array} \right.$$

f continue et vérifie les hypothèses du Dirichlet donc la série de Fourier associée à f converge vers $f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et on a: $\{f\}(x) = f(x)$

$$f(x) = \cos tx = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t^2}{t^2 - n^2} \cos nx \right]$$

$$f(\pi) = \cos t\pi = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2t^2}{n^2 - t^2} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{\pi t}{t \sin \pi t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t^2}{n^2 - t^2}}$$

EX 14 :

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ \pi - x & \text{si } x \in]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

f paire et g impaire sur $\mathbb{R}^*$

1°) a) f paire donc $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} du + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - u) du$$

$$= \frac{1}{2} (u)_0^{\pi/2} + (u)_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} (u^2)_{\pi/2}^{\pi} = \boxed{\frac{3\pi}{8}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n u du$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \cos n u du + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - u) \cos n u du \right]$$

$$= \frac{1}{n} (s n u)_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi} \left((\pi - u) \cdot \frac{s n u}{n} \right)_{\pi/2}^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} s n u du$$

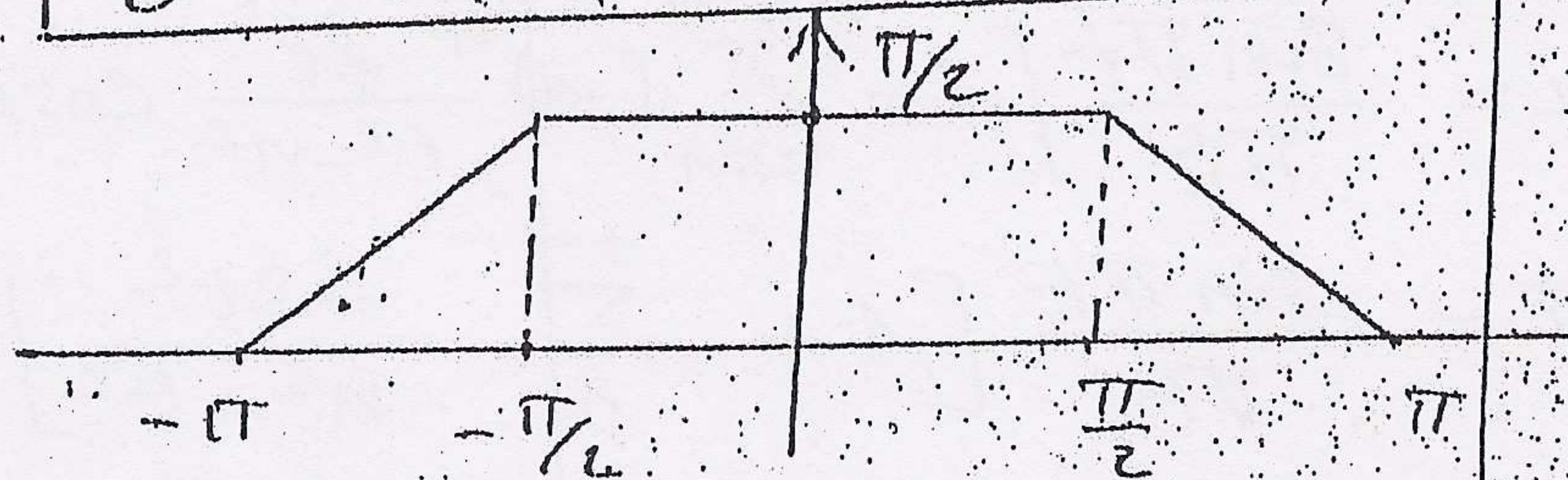
on trouve :

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2} \left[(-1)^{n+1} + \cos n \frac{\pi}{2} \right]$$

la série de Fourier associée à f est :

$$\boxed{\frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n^2} \left[(-1)^{n+1} + \cos n \frac{\pi}{2} \right] \cos n u}$$

b)



f est bornée sur $[-\pi, \pi]$

f est $\nearrow$ continue sur $]-\pi, 0[$

f est $\searrow$ continue sur $]0, \pi[$

Donc par le théorème de Dirichlet la série de Fourier associée à f converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et sa somme est :

$$\boxed{\{f\}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}}$$

(13)

Or f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc $\{f\}(x) = 1$
 $\forall x \in \mathbb{R}$, c'est à dire f est développable en série
 de Fourier.

c) On a $|a_n \cos nx| \leq \frac{4}{\pi n^2}$ terme général d'une
 série numérique CV.

2°) a) g impaire $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \sin nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \right]$$

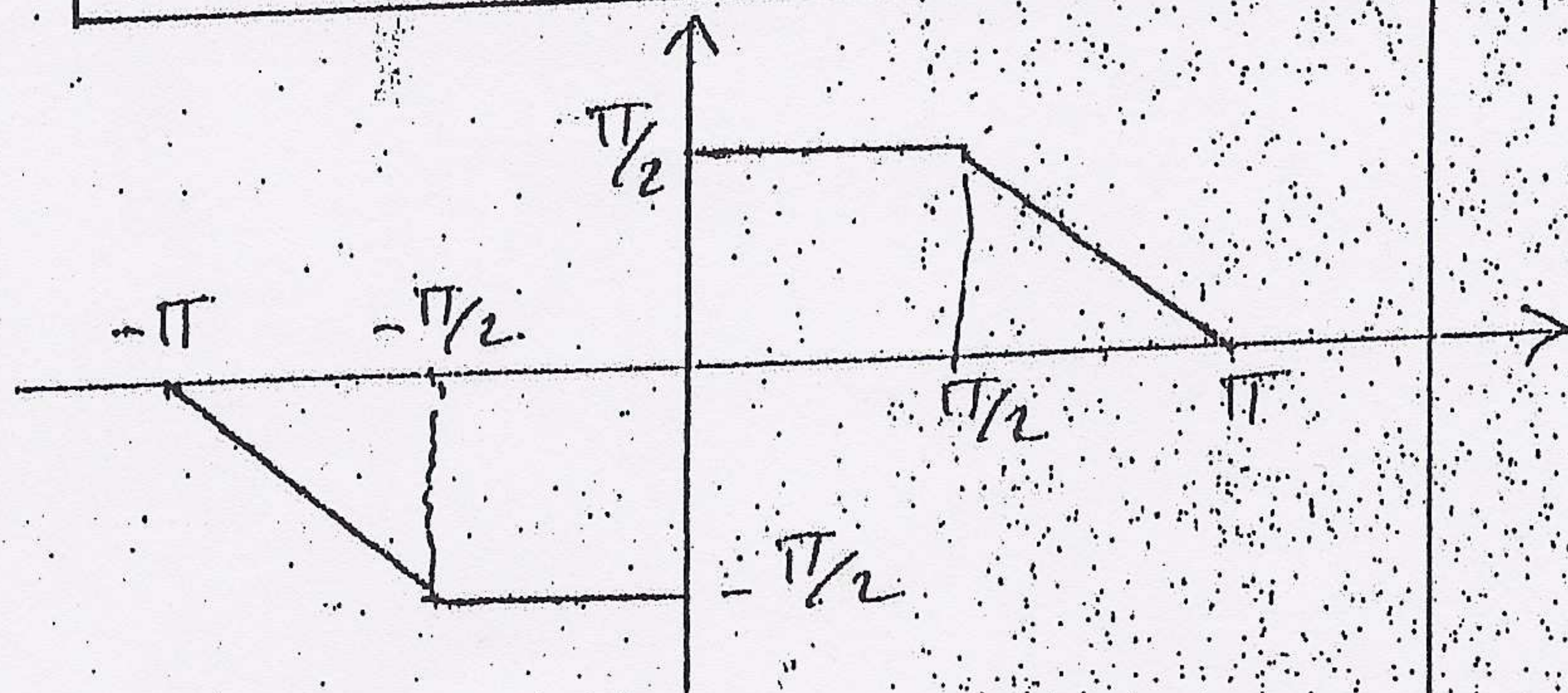
après intégration on trouve :

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi n^2} \sin n \frac{\pi}{2}$$

La série de Fourier associée à g est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{\pi n^2} \sin n \frac{\pi}{2} \right) \sin nx$$

b)



g est bornée sur $[-\pi, \pi]$, g est décroissante continue
sur $] -\pi, 0[$ et décroissante continue sur $] 0, \pi[$

donc par le théorème de Dirichlet, la série de
 Fourier de g converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et